



# 数 学

(120 分)

## 注意事項

1. 解答開始の合図があるまで、問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は 4 問で、2 ページあります。
3. 問題冊子には、「下書き用紙 1」～「下書き用紙 4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は、計算などに使用することができます。
4. 解答開始後、解答冊子の表紙所定欄に受験番号、氏名をはっきり記入しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. 解答は、解答冊子の指定されたページに書きなさい。解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は、下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

1  $a$  を実数とする。曲線  $C: y = x^2 - 2ax + a^2 - a + 2$  と直線  $l: y = 2x - 1$  は異なる2点で交わるとする。

- (1)  $a$  の値の範囲を求めよ。
- (2)  $C$  と  $l$  の交点のうち  $x$  座標の小さい方を  $P$  とする。  $P$  の  $x$  座標の最小値とそのときの  $a$  の値を求めよ。
- (3)  $C$  と  $l$  の2つの交点がともに  $x \leq 3$  の範囲にあるとき、  $a$  の値の範囲を求めよ。

2 各辺の長さが1の正四面体  $OABC$  を考える。  $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ ,  $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ ,  $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$  とおいたとき、点  $D$  は  $\overrightarrow{OD} = k(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$  を満たす。ただし、  $0 < k < \frac{1}{3}$  とする。

- (1) 内積  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  および  $|\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}|^2$  の値を求めよ。
- (2)  $\overrightarrow{AD}$  を、  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  および  $k$  を用いて表せ。
- (3)  $|\overrightarrow{AD}|^2$  を  $k$  を用いて表せ。
- (4) 辺  $OA$  を  $s:1-s$  に内分する点を  $P$ , 辺  $BC$  を  $t:1-t$  に内分する点を  $Q$  とする。  $D$  は線分  $PQ$  を  $u:1-u$  に内分しているとする。ただし、  $0 < s < 1$ ,  $0 < t < 1$ ,  $0 < u < 1$  とする。
  - (ア)  $t$  の値を求めよ。また、  $s$  と  $u$  をそれぞれ  $k$  を用いて表せ。
  - (イ) 線分  $PQ$  の長さが最小になるときの  $k$  の値を求めよ。また、このときの  $|\overrightarrow{AD}|$  および  $|\overrightarrow{OD}|$  の値を求めよ。

3 動点 P は、次の手順 (i) から手順 (iii) に従って  $\triangle ABC$  の頂点から頂点へ移動する。最初に P は頂点 A にあるとする。

手順 (i) 1 から 5 までの整数が 1 つずつ書かれた 5 枚のカードから 1 枚を無作為に引く。

手順 (ii) 引いたカードに書かれた数だけ、P は反時計まわりに移動する。例えば、P が B にある状態で 4 が書かれたカードを引いたとき、P は反時計まわりに  $B \rightarrow C \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$  と移動する。

手順 (iii) P が移動した後に引いたカードを元に戻す。

(i) から (iii) の手順を  $n$  回行った後に P が A にある確率を  $a_n$  とする。ただし、 $n$  は自然数である。

(1)  $a_1$  を求めよ。

(2) (i) から (iii) の手順を  $n$  回行った後に、P が B にある確率を  $b_n$ 、C にある確率を  $c_n$  とする。 $a_{n+1}$  を、 $a_n$ 、 $b_n$  および  $c_n$  を用いて表せ。

(3)  $a_{n+1}$  を  $a_n$  を用いて表せ。さらに、 $a_n$  を  $n$  を用いて表せ。

(4)  $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$  を求めよ。また、極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{2n-1}$  を求めよ。

4  $\theta$  を実数とする。

(1) 関数  $t = \cos \theta + \sin \theta$  を考える。

(ア)  $t$  の値の範囲を求めよ。

(イ)  $\cos \theta \sin \theta$  を  $t$  を用いて表せ。

(ウ)  $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$  を  $t$  と導関数  $\frac{dt}{d\theta}$  を用いて表せ。

(2) 関数  $y = (\cos \theta + \sin \theta + 1) \sin 2\theta$  の最大値と最小値を求めよ。

(3) 定積分  $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2\theta \sin 2\theta}{2 + \cos \theta + \sin \theta} d\theta$  を求めよ。

問題は、このページで終わりである。