



数 学

(120分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は5問で、2ページあります。①から③は必答問題です。④と⑤は選択問題で、いずれかを選択しなさい。計4問を解答しなさい。
3. 問題冊子には、「下書き用紙1」～「下書き用紙4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は、計算などに使用することができます。
4. 解答開始後、解答冊子の表紙所定欄に受験番号、氏名をはっきり記入しなさい。表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。
5. 解答は、解答冊子の指定されたページに書きなさい。解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。また、選択問題については、解答ページにおいて、選択した問題番号を一つ○で囲みなさい。選択した問題番号を○で囲んでいない答案は無効にすることがあります。
6. 解答冊子は、どのページも切り離してはいけません。
7. 試験終了後、問題冊子は、下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

1 $k > 0$ とする。 xy 平面において、次の連立不等式の表す領域の面積を S とする。

$$0 \leq x \leq 8, \quad 0 \leq y \leq 4, \quad \frac{k}{2}x \leq y \leq kx$$

- (1) $k = 1$ のとき、 S の値を求めよ。
- (2) $k = \frac{1}{2}$ のとき、 S の値を求めよ。
- (3) S を k を用いて表せ。
- (4) S の最大値とそのときの k の値を求めよ。

2 $\triangle ABC$ および辺 BC 上の点 D について、次の条件 (i) から (iv) を考える。ただし、 $\angle BAD = \theta$ 、 $BD = x$ とする。

- (i) $\triangle ABD$ の外接円の半径は 1 である。
- (ii) $AB : BD = 2 : 1$
- (iii) $\angle BAD = \angle DAC$
- (iv) $AC = 2$

- (1) 条件 (i) が成り立つとき、 $\sin \theta$ と $\cos 2\theta$ をそれぞれ x を用いて表せ。
- (2) 条件 (ii), (iii), (iv) がすべて成り立つとき、線分 DC の長さを求めよ。また、そのときの x の値の範囲を求めよ。
- (3) 条件 (i) から (iv) がすべて成り立つとき、 x の値を求めよ。

3 関数 $f(x) = (x - p)(x - q)^2$ を考える。ただし、 $p < q$ とする。

- (1) $f(x)$ の極値と、そのときの x を p, q を用いて表せ。
- (2) p, q を素数とする。(1) で求めた x の値がすべて素数となる組 (p, q) のうち、 $2p + q$ が最小になるものはただ 1 組であることを示せ。また、そのときの (p, q) を求めよ。
- (3) (p, q) が (2) で求めた組のとき、曲線 $y = f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

4 $a > 0$ とする。関数 $f(\theta) = \frac{a + \cos \theta}{\sin \theta}$ ($0 < \theta < \pi$) を考える。

(1) 導関数 $f'(\theta)$ を求めよ。

(2) $f(\theta)$ が極小値をもつとき、 a の値の範囲を求めよ。また、そのときの極小値を a を用いて表せ。

(3) $a = 1$ とする。定積分 $I = \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\frac{2}{3}\pi} f(\theta) d\theta$ を求めよ。

5 xy 平面において、不等式 $y < 0$ が表す領域に点 P があるとする。曲線 $y = \frac{x^2}{4}$ に P から引いた接線は 2 本ある。このときの接点をそれぞれ Q, R とする。ただし、 Q の x 座標は R の x 座標より小さいとする。

(1) $P(0, -1)$ のとき、 Q と R の座標を求めよ。

(2) $\angle QPR = \theta$ とする。

(ア) P が直線 $y = -1$ 上を動くとき、 θ が一定であることを示せ。また、そのときの θ の値を求めよ。

(イ) P が直線 $y = -3$ 上を動くとき、 θ の最小値を求めよ。

問題は、このページで終わりである。