前

# 数　　　学

## (120分)

### 注意事項

1. 解答開始の合図があるまで，この問題冊子および解答冊子の中を見てはいけません。

2. 問題は４問で，２ページあります。

3. 問題冊子には，「下書き用紙 1」〜「下書き用紙 4」と書いてある下書き用紙がついています。下書き用紙と問題冊子の余白は，計算などに使用することができます。

4. 解答開始後，**解答冊子の表紙所定欄に受験番号，氏名をはっきり記入しなさい。**表紙にはこれら以外のことを書いてはいけません。

5. **解答は，解答冊子の指定されたページに書きなさい。**解答に関係のないことを書いた答案は無効にすることがあります。

6. 解答冊子は，どのページも切り離してはいけません。

7. 試験終了後，問題冊子は，下書き用紙も含めて持ち帰りなさい。解答冊子は持ち帰ってはいけません。

$\boxed{1}$ $a$, $b$, $c$を実数とする。$m$, $n$を0でない整数とする。2つの曲線

$$C_1 : y = \frac{1}{4}x^2 + ax + b,\ C_2 : y = mx^2 + nx + c$$

および直線$\ell : y = -x$を考える。

(1) $C_1$が$x = 1$で$\ell$と接するとき，$a$と$b$の値を求めよ。

(2) $C_2$が$x = -2$で$\ell$と接するとする。$mn$が最小となるときの$m$, $n$, $c$の値を求めよ。

(3) $a$, $b$, $c$, $m$, $n$を(1), (2)の題意を満たす値とする。$C_1$と$C_2$で囲まれた部分の面積$S$を求めよ。

$\boxed{2}$ $s$を実数とする。$\alpha$, $\beta$を$\alpha + \beta = s$と$\alpha^2 + \beta^2 = 1$を満たす虚数とする。

(1) $\alpha\beta$を$s$を用いて表せ。

(2) $\alpha$, $\beta$を解とする$x$の2次方程式を$s$を用いて作れ。ただし，$x^2$の係数は1とする。

(3) $s$の値の範囲を求めよ。

(4) $t$を実数とする。$x$の整式$F(x) = x^3 - 2sx^2 + tx + \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s$を考える。

(ア) (2)の題意を満たす2次方程式を$G(x) = 0$とする。整式$F(x)$を2次式$G(x)$で割ったときの商$Q(x)$と余り$R(x)$を$s$, $t$を用いて表せ。

(イ) $x$の方程式$F(x) = 0$が$\alpha$, $\beta$を解にもつとき，$s$, $t$の値を求めよ。また，このときの$F(x) = 0$の解をすべて求めよ。

$\boxed{3}$ $\triangle$ABCにおいて，$\mathrm{AB} = x - 1$，$\mathrm{BC} = x$，$\mathrm{CA} = x + 1$とする。

(1) $x$の値の範囲を求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{BAC}$を$x$を用いて表せ。

(3) $\triangle$ABCの内接円の中心をI，直線CIと辺ABとの交点をPとする。Pから辺ACに下ろした垂線と辺ACとの交点をQとする。

(ア) AP，AQをそれぞれ$x$を用いて表せ。

(イ) $\dfrac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{AQ}}$の最大値とそのときの$x$の値を求めよ。

$\boxed{4}$ 2つの関数$f(x) = \log x$，$g(x) = x^{\frac{1}{3}}$を考える。ただし，logは自然対数である。なお，必要ならば$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$であることを証明なしで用いてよい。

(1) 関数$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(x > 0)$の増減を調べて，極値とそれを与える$x$の値を求めよ。

(2) $a$を実数とする。$x$の方程式$\dfrac{f(x)}{g(x)} = a$ $(x > 0)$の実数解の個数を求めよ。

(3) $a > 0$とする。2つの曲線$C_1$：$y = f(x)$ $(x > 0)$，$C_2$：$y = ag(x)$ $(x \geqq 0)$の共有点が1個のとき，$C_1$，$C_2$と$x$軸で囲まれた部分の面積$S$を求めよ。

**問題は，このページで終わりである。**